Riassunto. Le funzioni semiconcave si presentano in modo naturale nello studio di problemi di minimizzazione. Tali funzioni non sono, in generale, differenziabili nel loro dominio di definizione. Lo scopo di questo seminario è descrivere alcuni risultati riguardanti la struttura dell'insieme formato dai punti di non differenziabilità di una "generica" funzione semiconcava. Si mostrerà inoltre come tali risultati si applichino allo studio di problemi di controllo ottimo e di soluzioni di equazioni non-lineari del primo ordine.

Singolarità di funzioni concave

Sia Ω un sottoinsieme aperto e convesso di $\mathbf{R}^n$ e sia $u : \Omega \to \mathbf{R}$ una funzione concava. Poiché le funzioni concave sono localmente lipschitziane (si veda ad esempio [Fl]), allora, utilizzando il teorema di Rademacher, si ottiene che u è differenziabile quasi ovunque in Ω.

Il principale oggetto di questo seminario è l'insieme dei punti di non differenziabilità di u. Tale insieme, che nel seguito indicheremo con il simbolo $\Sigma(u)$, è detto l'insieme *singolare* per u ed i suoi elementi sono le *singolarità* di u. Da quanto appena richiamato si ha subito che $\Sigma(u)$ ha misura di Lebesgue zero.

Prima di iniziare un'analisi più dettagliata della struttura dell'insieme singolare è opportuno introdurre due oggetti che appariranno ripetutamente nel seguito.

L'insieme dei *limiti di gradienti* è definito come segue

$$D^*u(x) := \{p \in \mathbf{R}^n \, : \, \Omega \ni x_i \to x \, , \; Du(x_i) \to p\} \qquad (x \in \Omega) \, .$$

Osserviamo che, poiché u è differenziabile quasi ovunque in Ω, allora, per ogni $x \in \Omega$, $D^*u(x) \neq \emptyset$.

Il secondo oggetto è il *superdifferenziale* di u in x che (essendo u concava!) può essere semplicemente definito come l'involucro convesso di $D^*u(x)$, cioè

$$D^+u(x) = \mathrm{co}\, D^*u(x) \, .$$

Si ha quindi che $D^+u(x)$ è un insieme non vuoto compatto e convesso. È mostrato in [CS] che $D^*u(x)$ è contenuto nella frontiera topologica di $D^+u(x)$, cioè

$$D^*u(x) \subset \partial D^+u(x) \qquad \forall x \in \Omega \, .$$

L'interesse del superdifferenziale consiste nel fatto che esso rappresenta la naturale generalizzazione del gradiente nei punti in cui la funzione u non è differenziabile. Per chiarire il significato geometrico di tale nozione osserviamo che dire che $D^+u(x)$ è non vuoto significa dire che esiste un iperpiano che "tocca dall'alto" il grafico della funzione u nel punto $(x_0, u(x_0))$. Cioè, più il superdifferenziale è "grande" maggiore è il numero di iperpiani che "toccano dall'alto" il grafico di u. Nel caso in cui u è differenziabile in x lo spazio tangente è il solo iperpiano con questa proprietà, cioè se $x_0 \notin \Sigma(u)$ allora $D^+u(x_0) = \{Du(x_0)\}$.

Vale la seguente (a questo punto ovvia) caratterizzazione:

$$x_0 \in \Sigma(u) \qquad \text{se e solo se} \qquad \dim D^+u(x_0) \geq 1 \, .$$ [1]

[1] Ricordiamo che la dimensione di un insieme convesso è la dimensione del più piccolo iperpiano affine che lo contiene.

Risulta piuttosto naturale decomporre l'insieme singolare in sottoinsiemi "raggruppando" i punti in cui u ha superdifferenziale di dimensione costante. Più precisamente, per $k \in \{1, \cdots, n\}$, definiamo

$$\Sigma^k(u) := \{x \in \Omega \,:\, \dim D^+u(x_0) = k\}$$

si ha quindi che

$$\Sigma(u) = \cup_{k=1}^n \Sigma^k(u).$$

Rettificabilità di $\Sigma(u)$

Data u concava, un primo tipo di informazione che si può provare ad ottenere sull'insieme $\Sigma(u)$ è trovare delle "stime dall'alto". In altre parole, si può provare a misurare quanto tale insieme può essere "grande". Si è già visto che tale insieme ha misura di Lebesgue zero, possono però essere dati risultati più fini. Cominciamo con una definizione.

Un sottoinsieme $S \subset \mathbf{R}^n$ si dice ν-rettificabile se $S \subset f(\mathbf{R}^\nu)$, per una qualche mappa lipschitziana $f : \mathbf{R}^\nu \to \mathbf{R}^n$ (per convenzione S è 0-rettificabile se S è un singoletto). Più in generale, diremo che S è numerabilmente ν-rettificabile, $\nu \in \{0, \ldots, n\}$, se $S = \cup_i S_i$ per una qualche famiglia $\{S_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ di insiemi ν-rettificabili. Ricordiamo che, per ogni numero reale $\nu \in [0, n]$, la misura di Hausdorff ν-dimensionale di S è definita da

$$\mathcal{H}^\nu(S) := \frac{\alpha_\nu}{2^\nu} \sup_{\delta>0} \inf \Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(S_j))^\nu \,:\, S \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} S_j \,,\, \operatorname{diam}(S_j) < \delta \Big\},$$

con

$$\alpha_\nu = \frac{\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \qquad \text{e} \qquad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{t-1} ds.$$

Inoltre, la dimensione di Hausdorff di S è definita da

$$\mathcal{H}\text{-}\dim S = \inf\{\nu > 0 \,:\, \mathcal{H}^\nu(S) = 0\}.$$

Il principale risultato di rettificabilità di $\Sigma(u)$ (nel caso di u concava) è dovuto a Zajíček (si veda il lavoro [Z]). Il risultato di Zajíček è ottenuto in un contesto più generale di quello considerato in questo seminario (vale a dire è formulato per funzioni concave definite su spazi di Banach infinito dimensionali). Tale risultato può essere enunciato come segue.

Teorema [di rettificabilità]. *Sia $u : \Omega \to \mathbf{R}$ concava e sia $k \in \{1, \cdots, n\}$. Allora $\Sigma^k(u)$ è numerabilmente $n-k$ rettificabile. In particolare, $\Sigma(u)$ risulta essere numerabilmente $n-1$ rettificabile quindi $\mathcal{H}$-dim $\Sigma(u) \leq n-1$.*

Osservazione. *È facile vedere che la precedente stima dall'alto è ottimale. Basta infatti considerare in $\mathbf{R}^2$ la funzione $u(x,y) = -|x|$ ed osservare che in questo caso $\Sigma(u) = \{0\} \times \mathbf{R}$.*

Stime dal basso per $\Sigma(u)$

Una prospettiva in un certo senso opposta alla precedente consiste nel ricercare stime "dal basso" per l'insieme singolare. In altre parole ci si può porre la seguente domanda: ci sono delle condizioni che assicurano che un punto assegnato $x_0 \in \Sigma(u)$ appartenga ad una componente connessa di $\Sigma(u)$ di dimensione $\nu \geq 1$? In questo caso, diremo che la singolarità in x_0 *si propaga* lungo un insieme di dimensione ν. Questo problema fu studiato da Cannarsa e Soner [CS] nel caso di soluzioni di viscosità semiconcave di un'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman e da Ambrosio, Cannarsa e Soner in [ACS] nel caso di funzioni semiconcave con modulo generalizzato. In [CS], gli autori mostrarono che le singolarità si propagano lungo successioni di punti. In [ACS] furono trovate delle condizioni che permettono di ottenere delle stime della dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare in un intorno del punto $x_0 \in \Sigma(u)$. Tali condizioni sono espresse usando il superdifferenziale $D^+u(x_0)$. I risultati provati in [ACS] lasciavano aperti almeno due problemi. Prima di tutto non escludevano che la componente connessa di $\Sigma(u)$ contenente x_0 si riduca al solo $\{x_0\}$. Inoltre, si assumeva come ipotesi $\dim D^+u(x_0) < n$. Una completa risposta ai problemi precedenti è fornita dal prossimo risultato (per la dimostrazione si veda [AC2]).

Teorema [di propagazione lungo archi]. *Sia $u : \Omega \to \mathbf{R}$ concava e sia $x_0 \in \Omega$ tale che*

$$\partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0) \neq \emptyset \,. \tag{1}$$

Allora per ogni $p_0 \in \partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0)$ e per ogni θ appartenente al cono normale a $D^+u(x_0)$ in p_0, $N_{D^+u(x_0)}(p_0) = \{q \in \mathbf{R}^n : \langle q, p - p_0\rangle \leq 0 \ \forall p \in D^+u(x_0)\}$, esiste un arco lipschitziano $x(\cdot) : [0,1] \to \Sigma(u)$ tale che

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{x(s) - x_0}{s} = -\theta \,.$$

Inoltre esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $s \in [0,1]$, $\operatorname{diam} D^+u(x(s)) \geq \delta$ e $x(s) \neq x_0$ per ogni $s \in (0,1]$.

In un certo senso il precedente enunciato non è completo nel senso che, come chiarito dal seguente esempio, ci si aspetta che possano esserci fenomeni di propagazione di singolarità lungo insiemi di dimensione maggiore di 1.

Esempio. *Si consideri la funzione concava*

$$u(x) = -|x_3| \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,.$$

È immediato vedere che l'insieme singolare di u è il piano bidimensionale

$$\Sigma(u) = \{x \in \mathbf{R}^3 \,:\, x_3 = 0\} \,.$$

Ma, applicando il teorema precedente otterremmo solo l'esistenza di un arco lipschitziano singolare passante per il punto 0.

Il prossimo risultato chiarisce che anche la precedente situazione può essere descritta (per la dimostrazione si veda [AC2]).

Teorema [di propagazione]. *Siano $u : \Omega \to \mathbf{R}$ concava ed $x_0 \in \Omega$ un punto singolare per u. Supponiamo che*

$$\partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0) \neq \emptyset$$

Fissato $p_0 \in \partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0)$, definiamo

$$\nu := \dim N_{D^+u(x_0)}(p_0)\,.$$

Allora esiste un numero positivo $\sigma > 0$ ed una mappa lipschitziana

$$\mathbf{f} : N_{D^+u(x_0)}(p_0) \cap B_\sigma \to \Sigma(u)$$

tali che

$$\mathbf{f}(q) = x_0 - q + |q|\mathbf{h}(q) \quad con \quad \mathbf{h}(q) \to 0 \quad per \quad N_{D^+u(x_0)} \cap B_\sigma(0) \ni q \to 0$$

e

$$\liminf_{r \to 0^+} r^{-\nu} \mathcal{H}^\nu \Big(\mathbf{f}(N_{D^+u(x_0)}(p_0) \cap B_\sigma) \cap B_r(x_0) \Big) > 0\,.$$

Osserviamo che nel precedente risultato la stima della densità di Hausdorff in x_0 dell'immagine di $\mathbf{f}$ è cruciale. È infatti da tale stima che si ottiene che il fenomeno di propagazione avviene effettivamente lungo un insieme di dimensione ν.

Funzioni semiconcave

I risultati descritti nella sezione precedente valgono (senza alcuna modifica) anche per una classe di funzioni più ampia di quella delle funzioni concave. Iniziamo con alcune definizioni.

Dato $A \subset \mathbf{R}^n$, una funzione $u : A \to \mathbf{R}$ si dice *semiconcava* se esiste una costante $C \in \mathbf{R}$ tale che

$$tu(x_1) + (1-t)u(x_0) - u\big(tx_1 + (1-t)x_0\big) \leq Ct(1-t)|x_1 - x_0|^2 \qquad \forall t \in [0,1] \quad (2)$$

per ogni $x_0, x_1 \in A$ tali che il segmento $[x_0, x_1]$ sia incluso in A. Una tale costante C è una *costante di semiconcavità* per u in A.

Osservazioni.
(i) È chiaro che le funzioni semiconcave sono una generalizzazione delle funzioni concave. Infatti se A è convesso e $C \leq 0$ allora (2) è la definizione di funzione concava in A.
(ii) Talvolta ci si riferisce ad una funzione soddisfacente alla disuguaglianza (2) come ad una funzione con modulo di semiconcavità lineare. Più in generale si potrebbe prendere come definizione di semiconcavità una disuguaglianza del tipo

$$tu(x_1)+(1-t)u(x_0)-u\Big(tx_1+(1-t)x_0\Big) \leq t(1-t)|x_1-x_0|\omega(|x_1-x_0|) \qquad \forall\, t \in [0,1] \tag{3}$$

per un opportuno modulo di continuità $\omega(\cdot)$. Ci si riferirà ad una funzione soddisfacente (3) come ad una funzione con modulo di semiconcavità generalizzato. Risultati di rettificabilità e di propagazione di singolarità valgono anche per funzioni semiconcave con modulo generalizzato (si vedano ad esempio [AC1] per la rettificabilità ed [A1] per la propagazione). Osserviamo inoltre che tale estensione della classe delle funzioni semiconave è indotta dall'analisi della regolarità della funzione valore (associata ad alcuni problemi di controllo ottimo) per la quale la semiconcavità con modulo lineare risulta essere troppo restrittiva.

Si può mostrare che (se A è convesso)

$$u \;\text{ è semiconcava in }\; A \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \mapsto u(x) - C|x|^2 \;\text{ è concava in }\; A.$$

In altre parole, una funzione semiconcava è la somma di una funzione concava con un polinomio quadratico. In completa analogia con il caso delle funzioni concave le nozioni di superdifferenziale e di insieme dei limiti di gradienti si estendono alle funzioni semiconcave. Inoltre, i risultati sull'insieme singolare enunciati per funzioni concave valgono (senza alcuna modifica) anche per funzioni semiconcave.

Osservazione. *Ci si può chiedere se per tutte le funzioni u che soddisfano (3) con $\omega(\cdot) = |\cdot|^\alpha$, per un certo $\alpha \in]0,1[$, si ha che u si rappresenta come somma di una funzione concava con una funzione con derivata prima hölderiana di esponente α (in questo modo lo studio dell'insieme dei punti di non-differenziabilità di una funzione semiconcava con modulo generalizzato si ridurrebbe a quello di una funzione concava). Si può mostrare che la precedente riduzione è, in generale, falsa.*

È utile estendere la precedente classe di funzioni introducendo le funzioni localmente semiconcave. Più precisamente, sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un sottoinsieme aperto. Una funzione $u : \Omega \to \mathbf{R}$ si dice *localmente semiconcava* in Ω se u è semiconcava in tutti i sottoinsiemi compatti di Ω. Denoteremo con il simbolo $SC(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni localmente semiconcave definite su Ω. Le funzioni semiconcave si presentano in modo naturale nello studio di problemi di minimizzazione. Per chiarire questo fatto consideriamo un esempio elementare.

Esempio. *Sia $A(x)$ una famiglia di matrici simmetriche $k \times k$ dipendenti con regolarità C^2 dal parametro x che varia su un insieme compatto e convesso di $\mathbf{R}^n$ (non è richiesta alcuna relazione tra i numeri naturali k ed n). Consideriamo quindi l'autovalore minimo di $A(x)$, cioè*

$$\lambda_1(x) = \min_{|\xi|=1} \langle A(x)\xi, \xi \rangle$$

(dove $\langle \cdot,\cdot \rangle$ denota l'usuale prodotto scalare in $\mathbf{R}^k$). Quello che si ha in generale è che, pur essendo i coefficienti di A regolari in x, l'autovalore minimo perde regolarità . Si consideri ad esempio per $k = 2$ ed $n = 1$ la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

per la quale si ha $\lambda_1(x) = -|x|$. Tuttavia, in generale, l'autovalore minimo $\lambda_1(\cdot)$ è una funzione semiconcava.

La funzione distanza

Per chiarire la relazione tra le funzioni semiconcave e la teoria dei controlli descriviamo ora un semplice problema di controllo ottimo. Consideriamo in $\mathbf{R}^n$ il *sistema di controllo* (talvolta detto *equazione di stato*)

$$\begin{cases} y'(t) = u(t) & t > 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$

dove $u(\cdot) : [0, +\infty[\to B_1(0)$ è una generica funzione misurabile (detta *controllo*) a valori nella palla chiusa di raggio 1 e centro 0. Tale funzione può essere scelta dal "controllore" in modo da raggiungere un determinato obiettivo. Denotiamo con $y^{x,u}$ la soluzione dell'equazione di stato che parte dal punto x con controllo u e con $\mathcal{U}$ l'insieme di tutti i controlli.

Dato S un sottoinsieme chiuso e non vuoto di $\mathbf{R}^n$, consideriamo il seguente problema: fissato $x \in \mathbf{R}^n \setminus S$ trovare il controllo u in modo che $y^{x,u}$ raggiunga l'insieme S nel minor tempo possibile.

Un controllo che permette di raggiungere il precedente obiettivo è detto un *controllo ottimo* e la corrispondente traiettoria $y^{x,u}$ è una *traiettoria ottima*. Il precedente problema è detto *problema di tempo minimo*. Un importante oggetto dal quale si possono ottenere molte informazioni sul problema di controllo è la *funzione valore*:

$$T(x) := \inf\{t > 0 : \quad y^{x,u}(t) \in S\,, \qquad u \in \mathcal{U}\}$$

(in questo caso la funzione valore è detta funzione *tempo minimo*). È facile vedere che se T è differenziabile in $x \in \mathbf{R}^n \setminus S$ allora il controllo ottimo per x è dato da $-DT(x)$.

In generale la funzione valore non è differenziabile tuttavia, in molti problemi di controllo ottimo, risulta essere semiconcava.

Nel problema che stiamo considerando il tempo minimo coincide con la funzione distanza (euclidea) dall'insieme S, cioè

$$T(x) = d_S(x) := \min\{\|x - y\| \, : \, y \in S\}\,.$$

È interessante osservare che la funzione distanza è (banalmente) lipschitziana inoltre $d_S \in SC(\mathbf{R}^n \setminus S)$ ma, in generale, non è differenziabile. Più precisamente, vale la seguente caratterizzazione:
$x \in \mathbf{R}^n \setminus S$ è un punto di differenziabilità per d_S se e solo se esiste un unico elemento $y \in S$ tale che $d_S(x) = \|y - x\|$.
Tale enunciato può essere reso in modo più suggestivo dicendo che
$x \in \Sigma(T)$ se e solo se esistono più traiettorie ottime passanti per x.

Si ha così un'interpretazione dal punto di vista della teoria dei controlli di che cosa sia una singolarità. Nel caso della funzione distanza la condizione (1) è necessaria e sufficiente per avere propagazione di singolarità. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema. *Sia $S \subset \mathbf{R}^n$ un insieme chiuso e non vuoto. Allora x è un punto isolato di $\Sigma(d_S)$ se e solo se*

$$\partial D^+ d_S(x) = D^* d_S(x)\,.$$

Il precedente risultato è stato dimostrato nel caso di $n = 2$ da Motzkin in [M] e successivamente esteso al caso di spazi di Hilbert in [WF].

Equazioni non-lineari del primo ordine

Consideriamo ora un'equazione non-lineare alle derivate parziali del primo ordine della forma

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0 \qquad \text{quasi ovunque in} \qquad \Omega\,. \tag{4}$$

dove $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ è fissato.

Il metodo delle caratteristiche permette di costruire soluzioni di classe C^2 di (4). È d'altra parte noto che, in generale, (4) non ammette soluzioni globali regolari. Al fine di ottenere risultati di esistenza ed unicità globali per soluzioni di (4) si sono cercate delle opportune nozioni di soluzione debole: le soluzioni semiconcave (si veda ad esempio [Do], [K] ed [L]), le soluzioni di viscosità (si veda ad esempio [CEL] e [CL]) e le soluzioni di minimax (si veda [Su]).

Per chiarire il tipo di problematica e la sua relazione con la teoria dei controlli consideriamo un semplice esempio.

Esempio. *Consideriamo nuovamente il problema del tempo minimo per $n = 1$ ed $S = \{-1, 1\}$. In questo caso si ha che*

$$T(x) = 1 - |x| \qquad per \qquad x \in [-1, 1]\,.$$

È immediato riconoscere che T risolve la seguente equazione di Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1 & \textit{quasi ovunque in} \quad [-1,1] \\ u(-1) = u(1) = 0\,. \end{cases}$$

Ciò che si vorrebbe fare è poter caratterizzare T come l'unica soluzione (in un senso opportuno) della precedente equazione. È chiaro che la precedente equazione non ammette soluzioni classiche (questo segue dall'incompatibilità tra le condizioni omogenee di Dirichlet e l'equazione stessa). Esistono infinite funzioni che soddisfano l'equazioni quasi ovunque e convergono uniformemente alla funzione identicamente uguale a 0 (che non risolve l'equazione!). Si ha però che T è l'unica soluzione semiconcava di tale equazione.

Tranne che per classi di problemi molto particolari, che possiedono soluzioni globalmente differenziabili, la maggiore regolarità che ci si può aspettare per una soluzione debole u di (4) è la semiconcavità. Tale proprietà vale in situazione piuttosto generali a patto che $F(x, u, p)$ sia convessa rispetto a p.

Data una soluzione semiconcava u di (4) consideriamo i due seguenti problemi:

(P1) trovare una condizione necessaria e sufficiente affinché una singolarità $x_0 \in \Sigma(u)$ si propaghi;

(P2) trovare una dinamica che descriva la propagazione delle singolarità.

Esistono in letteratura alcuni risultati piuttosto particolari riguardanti i precedenti problemi. Ad esempio, per leggi di conservazione in una dimensione una soluzione completa dei problemi (P1) e (P2) è stata data da Dafermos in [D]. Il caso della funzione distanza da un sottinsieme chiuso $S \subset \mathbf{R}^N$ è un altro esempio interessante. Essa (come già visto nel caso $n = 1$ e $S = \{-1, 1\}$) è una soluzione semiconcava dell'equazione iconale. In questo caso, l'analisi del problema (P1) è già stata descritta nella precedente sezione. Mentre per il problema (P2) l'unico risultato noto era, a conoscenza di chi scrive, quello di Bartke e Berens (si veda [BB]) nello spazio euclideo bidimensionale.

Supponiamo che $F : \overline{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ sia una funzione continua e che valgano le seguenti ipotesi:

(A1) $p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa;

(A2) per ogni $(x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}$ e per ogni $p_0, p_1 \in \mathbf{R}^N$,

$$[p_0, p_1] \subset \{p \in \mathbf{R}^N \, : \, F(x, u, p) = 0\} \qquad \Longrightarrow \qquad p_0 = p_1 \, .$$

L'ipotesi (A2) significa richiedere che l'insieme di livello 0 di F (rispetto a p) non contenga segmenti. Tale ipotesi è tipica quando si lavora con problemi genuinamente non-lineari. È chiaro che (A2) è soddisfatta se, ad esempio, F è strettamente convessa rispetto a p.

Osservazioni. *È facile vedere che, poiché F è continua, ogni soluzione semiconcava u di (4) soddisfa*

$$F(x, u(x), p) = 0 \quad \forall p \in D^* u(x)$$

per ogni $x \in \Omega$. Inoltre dalla convessità di F si ha che

$$F(x, u(x), p) \leq 0 \qquad \forall x \in \Omega \quad \forall p \in D^+ u(x) \, . \tag{5}$$

Ricordiamo che la disuguaglianza (5) non è nient'altro che la definizione di sottosoluzione di viscosità dell'equazione (4). Inoltre, ogni soluzione semiconcava di (4) soddisfa

$$F(x, u(x), p) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega \quad \forall p \in D^- u(x) \, . \tag{6}$$

Infatti, se $D^- u(x) \neq \emptyset$ allora u è differenziabile in x. Le due disuguaglianze (5) ed (6) caratterizzano le soluzioni di viscosità.

In altre parole, si è appena visto che se u è una soluzione quasi ovunque e semiconcava di (4) allora u è anche soluzione di viscosità della stessa equazione. Esistono risultati molto generali di esistenza, confronto e stabilità per soluzioni di viscosità . In tale contesto, ci si aspetta che le soluzioni di viscosità di equazioni con dati regolari siano semiconcave.

Il primo risultato che descriveremo mostra che la condizione (1) è necessaria e sufficiente per la propagazione di singolarità (si veda [AC4]).

Teorema. *Supponiamo che F soddisfi (A1) ed (A2), sia $u \in SC(\Omega)$ una soluzione di (4) e sia $x_0 \in \Sigma(u)$. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) $\partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0) \neq \emptyset$

(ii) *esiste una successione di punti $x_i \in \Sigma(u) \setminus \{x_0\}$, convergente ad x_0, ed un numero $\delta > 0$ tale che* $\operatorname{diam} D^+u(x_i) \geq \delta$, *per ogni $i \in \mathbf{N}$.*

Sorge ora naturale il seguente problema: come si può verificare se la condizione (1) è soddisfatta per una soluzione semiconcava di un'equazione data $F(x, u, Du) = 0$? Una risposta alla precedente domanda è fornita dal prossimo risultato (si veda [AC4]).

Poniamo, per ogni $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} &\arg \min_{p \in D^+u(x)} F(x, u(x), p) \\ &= \Big\{ \bar{p} \in D^+u(x) \ : \ F(x, u(x), \bar{p}) = \min_{p \in D^+u(x)} F(x, u(x), p) \Big\} . \end{aligned}$$

Proposizione. *Supponiamo che F oltre a soddisfare* (A1) *ed* (A2) *sia anche differenziabile rispetto a p. Sia $u \in SC(\Omega)$ una soluzione di (4) e sia $x_0 \in \Omega$. Allora,*

$$\arg \min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p) \neq \emptyset$$

e, per ogni $p_0 \in \arg\min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p)$,

$$\langle D_pF(x_0, u(x_0), p), p - p_0 \rangle \geq 0 \qquad \forall p \in D^+u(x_0) .$$

Inoltre,

$$x_0 \in \Sigma(u) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p) < 0 \tag{7}$$

Quindi se x_0 è un punto singolare per u, allora

$$\begin{gathered} \arg \min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p) \subset D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0) \\ D_pF(x_0, u(x_0), p_0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad p_0 \in \partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0) \end{gathered}$$

dove p_0 è un qualunque elemento di $\arg\min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p)$.

La precedente proposizione ed il teorema di propagazione di singolarità lungo archi per funzioni semiconcave portano al seguente

Teorema. *Supponiamo che F oltre a soddisfare* (A1) *ed* (A2) *sia anche differenziabile rispetto a p. Sia $u \in SC(\Omega)$ una soluzione di (4), sia $x_0 \in \Sigma(u)$ e supponiamo che*

$$D_pF(x_0, u(x_0), p_0) \neq 0 \quad \textit{per un certo} \quad p_0 \in \arg \min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p)\,.$$

Allora, esiste un arco lipschitziano $x(\cdot) : [0, \sigma] \to \Sigma(u)$, *con* $x(0) = x_0$, *ed un numero positivo* δ *tali che*

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{x(s) - x_0}{s} \neq 0$$
$$\operatorname{diam}\left(D^+u(x(s))\right) \geq \delta \qquad \forall s \in [0, \sigma]\,.$$

In particolare, $x(s) \neq x_0$ *per* $s > 0$ *piccolo abbastanza.*

Il risultato successivo mostra che l' ipotesi $D_pF(x_0, u(x_0), p_0) \neq 0$ (a meno di modificare F) è equivalente ad avere propagazione di singolarità .

Teorema. *Supponiamo che* F *oltre a soddisfare* (A1) *ed* (A2) *sia differenziabile rispetto a* p. *Sia* $u \in SC(\Omega)$ *una soluzione di (4) e sia* $x_0 \in \Sigma(u)$. *Fissato* $p_0 \in \arg\min_{p \in D^+u(x_0)} F(x_0, u(x_0), p)$, *se* $p_0 \in \partial D^+u(x_0) \setminus D^*u(x_0)$ *allora per ogni sottoinsieme aperto* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *esiste una funzione* $G : \Omega' \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ *tale che*

(*a*) $G(x, u(x), Du(x)) = 0$ *a.e. in* Ω'

(*b*) G *è differenziabile rispetto a* p *e soddisfa l'ipotesi* (A2)

(*c*) $G(x_0, u(x_0), p_0) = \min_{p \in D^+u(x_0)} G(x_0, u(x_0), p)$

(*d*) $D_pG(x_0, u(x_0), p_0) \neq 0$.

Caratteristiche generalizzate

Vogliamo ora mostrare che le singolarità di una soluzione u di (4) si propagano secondo un'opportune inclusione differenziale. Per questo, introduciamo la seguente definizione.

Definizione. *Diremo che un arco lipschitziano* $x : [0, \sigma] \to \mathbf{R}^N$, *è una caratteristica generalizzata dell'equazione (4) con punto iniziale* x_0 *se* $x(0) = x_0$ *e*

$$x'(s) \in \operatorname{co} D_pF(x(s), u(x(s)), D^+u(x(s))) \quad \textit{quasi ovunque in} \quad [0, \sigma]\,.$$

Per provare un risultato di propagazione di singolarità lungo le caratteristiche generalizzate è naturale richiedere ulteriori proprietà di regolarità per F. Più precisamente, assumeremo che:

(A3) per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$, $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}^N$

$$|F(x_2, u_2, p) - F(x_1, u_1, p)| \leq L_0(|x_2 - x_1| + |u_2 - u_1|),$$

per una certa costante $L_0 > 0$;

(A4) per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$, $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$, $p_1, p_2 \in \mathbf{R}^N$

$$|D_pF(x_1, u_1, p_1) - D_pF(x_2, u_2, p_2)| \leq L_1(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|)$$

per una certa costante $L_1 > 0$.

Vale il seguente risultato.

Teorema. *Sia $u \in SC(\Omega)$ un soluzione di (4). Supponiamo che valgano* (A1), (A2), (A3), (A4) *e sia $x_0 \in \Sigma(u)$ tale che*

$$0 \notin \operatorname{co} D_pF(x_0, u(x_0), D^+u(x_0)) \,. \tag{8}$$

Allora esiste una caratteristica generalizzata $x : [0, \sigma] \to \Omega$ dell'equazione (4) con punto iniziale x_0 tale che $x(\cdot)$ è iniettiva e $x(s) \in \Sigma(u)$ per ogni $s \in [0, \sigma]$.

L'Equazione iconale

Studiamo ora le singolarità di una soluzione semiconcava dell'equazione iconale

$$\begin{cases} |Du(x)|^2 = 1 & \text{quasi ovunque in } \quad \mathbf{R}^N \setminus S \\ u(x) = 0 & \text{in } \quad \partial S \,, \end{cases} \tag{9}$$

dove $S \subset \mathbf{R}^N$ è un insieme chiuso e non vuoto.

Osservazione. *Si può mostrare che l'equazione (9) ammette un'unica soluzione di viscosità non-negativa. Tale soluzione è $d_S(x)$, cioè la funzione distanza da S.*

Vale il risultato seguente:

Lemma. *Sia u una funzione semiconcava in Ω. Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste $\sigma > 0$ tale che il problema*

$$\begin{cases} x'(s) \in D^+u(x(s)) & \textit{quasi ovunque in} \quad [0, \sigma] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{10}$$

ammette un'unica soluzione.

Si può quindi ottenere il seguente risultato di propagazione lungo caratteristiche generalizzate dell'equazione iconale (si veda [AC4]).

Teorema *Sia $u \in SC(\Omega)$ una soluzione dell'equazione (9) e sia $x_0 \in \Sigma(u)$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $0 \notin D^+u(x_0)$;

(ii) *esiste una soluzione non costante $x(\cdot)$ di (10) tale che $x(s) \in \Sigma(u)$, per ogni $s \in [0,\sigma]$.*

Osservazione. *Aggiungendo nell'enunciato del precedente risultato l'ipotesi $u \geq 0$, si ha che l'affermazione* (i) *ha un semplice significato geometrico. Infatti, poiché $u \equiv d_S$ si può mostrare che $0 \notin D^+d_S(x_0)$ se $x_0 \notin co\ S$.*

Equazioni di evoluzione

Consideriamo ora la propagazione di singolarità di soluzioni semiconcave di equazioni di Hamilton-Jacobi della forma

$$u_t + H(t,x,u,\nabla u) = 0 \qquad \text{quasi ovunque in} \qquad]0,T[\times U\,, \tag{11}$$

dove $U \subset \mathbf{R}^n$ è un insieme aperto. Supponiamo che $H :]0,T[\times U \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sia una funzione continua tale che

$(H1)$ $p \mapsto H(t,x,u,p)$ è differenziabile e strettamente convessa per ogni (t,x,u) in $]0,T[\times U \times \mathbf{R}$

$(H2)$ H e D_pH sono localmente lipschitziani in $]0,T[\times U \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Osservazione. *L'ipotesi (H1) può essere indebolita. Un problema particolarmente significativo (che motiva tale estensione) è il problema di Mayer (per il quale H risulta essere positivamente omogenea di grado 1). Si veda in proposito il lavoro [A2].*

Si può mostrare che vale il seguente risultato (si veda [AC4]).

Teorema. *Sia $u \in SC(]0,T[\times U)$ una soluzione di (11) e supponiamo che valga l'ipotesi* (H1). *Allora, per ogni $(t,x) \in \Sigma(u)$,*

$$\partial D^+u(t,x) \setminus D^*u(t,x) \neq \emptyset\,.$$

Una immediata conseguenza del precedente risultato è che tutte le singolarità di u si propagano. Inoltre, si ha una naturale direzione di propagazione: le singolarità si propagano "in avanti" nel tempo.

Al fine di dare un enunciato preciso in questo senso introduciamo

$$\nabla^+u(t,x) := \left\{\eta \in \mathbf{R}^n \,:\, \limsup_{h\to 0} \frac{u(t,x+h) - u(t,x) - \langle \eta, h\rangle}{|h|} \leq 0\right\},$$

e

$$\nabla^*u(t,x) = \{p \in \mathbf{R}^n \,:\, x_i \to x\,,\ \ \nabla u(t,x_i) \to p\}\,.$$

Osserviamo inoltre che, se $u \in SC(]0,T[\times U)$ allora

$$\nabla^+u(t,x) = \mathrm{co}\,\nabla^*u(t,x)\,.$$

Sia $\Pi_x : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ la proiezione sulle variabili "spaziali", cioé $\Pi_x(t,x) = x$. Allora si ha che, per ogni $u \in SC(]0,T[\times U)$,

$$\Pi_x D^+ u(t,x) = \nabla^+ u(t,x) \qquad \forall (t,x) \in]0,T[\times U .$$

Siamo ora in grado di enunciare il principale risultato di questa sezione.

Teorema. *Sia $u \in SC(]0,T[\times U)$ una soluzione di (11). Supponiamo che valgano le ipotesi* (H1) *ed* (H2) *e sia $(t_0,x_0) \in \Sigma(u)$. Allora esiste una caratteristica generalizzata $(t,x(t))$ dell'equazione (11) con punto iniziale (t_0,x_0) definita in un intervallo opportuno $[t_0,\sigma] \subset]0,T[$. In altre parole, esiste una soluzione*

$$\begin{cases} x'(t) \in \mathrm{co} D_p H(t, x(t), u(x(t)), \nabla^+ u(t,x(t))) & \textit{quasi ovunque in } [t_0,\sigma] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tale che $(t,x(t)) \in \Sigma(u)$, per ogni $t \in [t_0,\sigma]$.

Un interessante problema da porsi è cercare di capire quando si ha propagazione per tutti i tempi maggiori di t_0.

In [AC3] si mostra che assumendo u concava e considerando un'equazione della forma

$$u_t + H(\nabla u) = 0$$

con H di classe C^2 strettamente convessa allora si ottiene che il "tempo d'esistenza" σ è infinito. In generale non ci si può aspettare $\sigma = +\infty$. In altre parole, come chiarito dal prossimo esempio, le singolarità possono sparire.

Esempio. *Consideriamo la funzione*

$$u(t,x) = -a^2(t)|x| \qquad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$$

dove $a(t) = \min\{0,\, t-1\}$. Allora, u è una soluzione semiconcava dell'equazione

$$u_t(t,x) + |u_x(t,x)|^2 + 2a(t)|x| - a^4(t) = 0 \qquad \textit{quasi ovunque in} \quad \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$$

ed u ha come insieme singolare il solo segmento $\Sigma(u) = \{(t,0) : 0 < t < 1\}$.

Bibliografia.

[A1] P.Albano, *Some properties of semiconcave functions with general semiconcavity modulus*, apparirà in Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[A2] P.Albano, *On the singular set for solutions to a class of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, apparirà in NoDEA.

[AC1] P.Albano e P.Cannarsa, *Singularities of semiconcave functions in Banach spaces,* In: "Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications", W.M. McEneaney - G.G.Yin - Q.Zhang (eds.), Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 171–190.

[AC2] P.Albano e P.Cannarsa, *Structural Properties of Singularities of Semiconcave Functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **28** (1999), pp. 719–740.

[AC3] P.Albano e P.Cannarsa, *Propagation of Singularities of Concave Solutions to Hamilton-Jacobi Equations*, in "Equadiff 99", Fiedler, Gröger, Sprekels editors, World Scientific, Singapore, 2000, pp. 583-588.

[AC4] P.Albano e P.Cannarsa, *Propagation of singularities for solutions to nonlinear first order PDEs*, Arch. for Rational Mech. Anal. **162**, (2002) pp. 1-23.

[ACS] L.Ambrosio, P.Cannarsa e H.M.Soner, *On the propagation of singularities of semi-convex functions,* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Scienze Fisiche e Matematiche - Serie IV **20** (1993), pp. 597–616.

[BB] K.Bartke e H.Berens, *Eine beschreibung der nichteindeutigkeitsmenge für die beste approximation in der euklidischen ebene,* J. Approx. Theory **47** (1986), pp. 54–74.

[CS] P.Cannarsa e H.M.Soner, *On the singularities of the viscosity solutions to Hamilton–Jacobi–Bellman equations,* Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), pp. 501–524.

[CEL] M.G.Crandall, L.C.Evans e P.L.Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), pp. 487-502.

[CL] M.G.Crandall e P.L.Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations,* Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), pp. 1–42.

[D] C.M.Dafermos, *Generalized characteristics and the structure of solutions of hyperbolic conservation laws*, Indiana Univ. Math. J. **26**, no. 6, (1977), pp. 1097–1119.

[Do] A.Douglis, *The continuous dependence of generalized solutions of non-linear partial differential equations upon initial data,* Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), pp. 267–284.

[Fl] W.H.Fleming, "Functions of several variables", Springer, New York, 1977.

[K] S.N.Kruzhkov, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations of the eikonal type I,* Math. USSR Sb. **27** (1975), pp. 406–445.

[L] P.L.Lions, "Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations", Pitman, Boston, 1982.

[M] Th. Motzkin, *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **21** (1935), pp. 562–567.

[Su] A.I.Subbotin, "Generalized solutions of first order PDEs: the dynamic optimization perspective", Birkäuser, Boston, 1995.

[WF] U.Westphal e J.Frerking, *On a property of metric projections onto closed subsets of Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc.* **105** (1989), pp. 644–651.

[Z] L.Zajíček, *On the points of multiplicity of monotone operators,* Comment. Math. Univ. Carolin. **19** (1978), pp. 179–189.